acadèmica

Física básica para ingenieros. Tomo I

Antonio Sanchís Sabater

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Antonio Sanchis Sabater

Física básica para ingenieros
Volumen I

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Primera edición, 2013 ▪ 16ª reimpresión, 2017

distribución: Telf.: 963 877 012 / www.lalibreria.upvu.es / Ref.: 0035_09_01_16

Imprime: Byprint Percom, S.L.

ISBN: 978-84-9048-044-1 (Obra Completa)
ISBN: 978-84-9048-102-8 (Volumen I)
Impreso bajo demanda

Impreso en España

Prefacio

La física es una materia básica de la ingeniería. A la hora de empezar los estudios de un grado de ingeniería el alumno cuenta con los conocimientos de física que ha adquirido en el bachillerato, tales como unidades, errores, cinemática del punto con el estudio de la caída de graves o los tiros horizontal y parabólico. La dinámica de la partícula, el estudio del trabajo y conservación del movimiento inicio de la termodinámica y el estudio de la electricidad con estudios de circuitos sencillos donde se aplica la ley de Ohm y el efecto Joule obteniendo la potencia eléctrica todos estos adquiridos en primero de Bachillerato, completando sus conocimientos preuniversitarios en el segundo de bachillerato con el campo gravitatorio (leyes de Kepler y ley de Newton) y el eléctrico. También cuenta con los conocimientos de movimiento armónico simple y el movimiento ondulatorio o la óptica geométrica. Además ha analizado el campo magnético con las ley de Ampere, fuerza de Lorentz o la ley de Laplace leyes de Faraday y Henry y la ley de Lenz, completando con elementos de física relativista, mecánica cuántica, y física nuclear.

Por ello cabe preguntarse si en un libro es necesario partir de los conceptos más básicos de la Física hasta alcanzar los contenidos que se pretende o hay que partir de lo que ya el estudiante sabe y centrarse en lo que le resulta novedoso. Es difícil saber que enfoque desarrollar en un texto dirigido a estudiantes, principalmente de los grados de ingeniería de la rama industrial. Por ello he buscado por una parte no incidir demasiado en lo que ya conocen para no hacer que el texto sea muy extenso (así y todo hay más de 1000 páginas), pero tampoco se puede omitir algunos conceptos previos que sirvan para centrar la materia, así algunas lecciones como la primera (*la magnitud física y su medida)* repite contenidos que el estudiante ha reproducido durante varios cursos, pero sirve como introducción a la materia objeto del libro, o la lección de óptica geométrica que ya ha estudiado en segundo de bachiller. Está lección de óptica geométrica he creído conveniente incluirla porque en caso contrario parece que quedaría coja la parte de estudio de la óptica, pero esta desarrollada de forma que un alumno que no ha estudiado el libro pueda abordarlo, por ello se repiten conceptos ya vistos en otras lecciones anteriores, como los vistos en el bachillerato. Un alumno podría prescindir de la lección si domina el segundo de bachillerato y además podría estudiar sólo esa lección sin el estudio previo de las anteriores.

Además, como se ha indicado, creo que muchos de los conceptos que se han introducido en el libro, que el alumno conoce del bachillerato, tales como las lecciones del movimiento ondulatorio o ondas mecánicas, si se hubiese prescindido de su reiteración se rompería el esquema coherente de la lección, así que he preferido extenderme en ese caso. También en la dinámica, la electrostática o el electromagnetismo he reproducido ideas que el estudiante ya posee, pero que no se pueden obviar en un texto que pretende estudiar dichas partes de la física.

Sin embargo se han repetido pocos conocimientos que el alumno conoce de cinemática, y se ha partido de que dichos conceptos ya están adheridos al estudiante, entendiendo que la repetición de dichos conceptos no son inevitables para buscar una coherencia en el texto.

Para completar el temario de lo que constituye la materia básica de Física falta en el libro la mecánica analítica, que si bien el estudiante la aborda, hoy por hoy ,no he considerarlo conveniente incluirla, no descarto que en próximas ediciones la incluya.

Las lecciones de la 2 a la 13 incluyen los contenidos de la asignatura de 9 créditos Física I de los grados de ingeniería que se imparten en la ETSII de la Universidad Politécnica de Valencia, las lecciones de la 15 a 21, con parte de los contenidos de las lecciones siguientes, además de la mecánica analítica, que no aborda este libro, completan el temario de Física II (asignatura de 6 créditos), siendo ambas asignaturas la que constituyen la materia básica de física que se imparte en primer curso. El resto de contenidos de este libro, según titulaciones de la Escuela, se estudia en la asignatura Física III, al menos la parte de dicha asignatura que corresponde a física aplicada, pero dada la diversidad de grados, a partir de la lección 22, unas lecciones son de Física II otras de Física III y otras no se estudian en dicha titulación

Es mi deseo que el libro sea de gran utilidad para el estudiante, y con esa intención lo he hecho.

En Valencia, septiembre de 2013

Índice

TOMO I

Lección 1 ***La magnitud física y su medida*** 7

Lección 2 ***Sistemas de vectores***.. 45

Lección 3 ***Tensores cartesianos*** 83

Lección 4 ***Centro de gravedad***... 113

Lección 5 ***Momentos de inercia*** 127

Lección 6 ***Cinemática de los sistemas indeformables***................................. 153

Lección 7 ***Movimiento plano***... 177

Lección 8 ***Cinemática del movimiento relativo***... 205

Lección 9 ***Dinámica de los sistemas***... 215

Lección 10 ***Dinámica del sólido rígido*** 261

Lección 11 ***Dinámica de sólidos planos rígidos con movimiento plano en su plano*** 281

Lección 12 ***Dinámica de percusiones***... 293

Lección 13 ***Estática***... 327

Lección 14 ***Grafoestática***... 351

Lección 15 ***Primera ley de la Termodinámica***.. 361

Lección 16 ***Segunda ley de la Termodinámica***... 399

Lección 17 ***Teoría elemental de campos***... 447

Lección 18 ***Estática de los fluidos***.. 473

Lección 19 ***Dinámica de los fluidos***... 503

TOMO II

Lección 20 ***Movimiento ondulatorio*** 547

Lección 21 ***Ondas mecánicas*** 597

Lección 22 ***El campo electrostático en el vacío*** 663

Lección 23 ***Conductores y capacidad eléctrica*** 693

Lección 24 ***Condensadores. Dieléctricos*** 719

Lección 25 ***Corriente continua*** 755

Lección 26 ***Redes de conductores*** 781

Lección 27 ***El campo magnético en el vacío*** 805

Lección 28 ***El campo magnético en la materia*** 839

Lección 29 ***Inducción electromagnética*** 865

Lección 30 ***Corrientes alternas*** 893

Lección 31 ***Óptica geométrica*** 929

Lección 32 ***Naturaleza de la luz*** 993

Lección 33 ***Fotometría*** 1017

Lección 34 ***Teoría del color*** 1043

APÉNDICES 1063

LECCIÓN 1

LA MAGNITUD FÍSICA Y SU MEDIDA

Objetivos

1. *Saber expresar una misma cantidad en distintas unidades.*
2. *Conocer el Sistema Internacional de Unidades.*
3. *Conocer los sistemas físicos de unidades.*
4. *Conocer los sistemas técnicos de unidades.*
5. *Determinar la ecuación dimensional de cualquier magnitud.*
6. *Saber aplicar la ley de homogeneidad.*

Contenido

1.1. La Ciencia física.
1.2. Magnitudes.
1.2.1. Observables.
1.2.2. Magnitudes físicas.
1.3. Unidades y medidas.
1.4. Leyes fundamentales. Constantes universales.
1.5. Sistemas de ecuaciones de definición. Sistema acorde de unidades.
1.6. Sistemas físicos de unidades.
1.7. Sistema internacional de unidades. Unidades Fundamentales
1.8. Unidades derivadas en el Sistema Internacional.
1.9. Otras unidades internacionales
1.10. Sistemas técnicos de unidades.
1.11. Otras unidades mecánicas.
1.12. Errores de medición.
1.12.1. Clasificación de los errores.
1.12.2. Cálculo del error en las medidas indirectas.
1.12.3. Teoría de errores. Curva de Gauss.
1.13. Ecuaciones dimensionales.
1.14. Cambio de unidades.
1.15. Ley de homogeneidad.

1.1. LA CIENCIA FÍSICA

La ciencia física se divide desde hace tiempo en las fracciones de mecánica, acústica, termodinámica, electricidad, magnetismo y óptica, a las que se añaden las secciones, hoy a la delantera de la investigación, de la naturaleza y estructura de la materia, física atómica y nuclear. Cuanto más se perfeccionan los conocimientos tanto más arbitrarios son los límites entre estas disciplinas. La acústica y la termodinámica se interpretan con ejemplos mecánicos; la óptica y el electromagnetismo se amalgaman en un único campo; la radiación térmica y la luz se consideran una misma cosa. Así con el modelo de onda se explican fenómenos tan distintos, en apariencia, como los acústicos, térmicos u ópticos. Grandes principios, como el de la energía cuya validez se restringía antiguamente a un campo acotado, rebosaron sus propios límites al avanzar la ciencia, abarcando a la totalidad de la física y logrando una posición predominante en todas las ciencias naturales. Todo esto, lleva a que el investigador se obstine en la exploración de teorías que aúnen la exposición de estas partes de forma que con el mínimo número de principios factibles y reglas, se describan el máximo número de fenómenos.

Excluyendo la biofísica, que en un rápido desarrollo se ha transformado en una ciencia independiente. La física de los fenómenos de la naturaleza inanimada son tan distintos que englobarlos y exponerlos parece, a primera vista, una tarea exasperada. Así y todo, resulta que es posible explicarlos por medio de un conjunto de conceptos que, seleccionados adecuadamente, no son tan considerables como para que no se puedan recopilar en un sencillo sistema conceptual, tal como longitud, tiempo, masa, velocidad, aceleración, carga eléctrica, etc. Su denominación se ha obtenido corrientemente del lenguaje ordinario. Pueden significar lo mismo que en éste último, pero no tiene por que ser así; su peculiaridad consiste en la necesidad de fijar de un modo unívoco su significado. La condición previa para establecer la ciencia física es la definición exacta e inconfundible de cada uno de los conceptos.

El paso siguiente a la mera descripción de la naturaleza es el descubrimiento de unas leyes; para formularlas exactamente, los conceptos físicos tienen que poder considerarse cuantitativamente, es decir, medirse, o sea expresarse mediante unidades y números. Por esta razón, para la formulación de las leyes naturales sólo resulta adecuada una determinada elección de conceptos.

La formulación matemática de un fenómeno físico se le denomina ley física, dicha formulación se puede hacer mediante la observación o mediante la imitación del fenómeno en condiciones engendradas y controladas (experimento físico). Cuando, al contrario, el experimentador provoca un fenómeno que sigue un trayecto apetecido y conocido, las leyes físicas están al beneficio de los fines del hombre. Por eso la física es la base de la técnica. El físico aspira prever las propiedades y leyes de la naturaleza y en general no se cuestiona la utilidad de la investigación. Pero la historia muestra que todo descubrimiento importante, por muy alejado que esté cuando aparece de toda aplicación práctica, fomenta más tarde el desarrollo de la técnica.

El fin investigador de la física consiste en asentar la teoría de los fenómenos naturales que estudia. El trayecto hasta ella pasa en primer lugar por la elaboración de una hipótesis. Las conclusiones que se derivan han de confirmarse siempre con la experiencia. Si la hipótesis da buenos resultados, ésta se denomina teoría. El concepto de teoría no tiene en la física el defecto de inseguridad que se da en el lenguaje habitual.

Pero la razón de la ley descubierta no es organizar lo observado y sintetizar los fenómenos complicados a lo más sencillo. Debe concebir, sobre todo, la posibilidad de pronosticar cuantitativamente el hecho físico.

1.2. MAGNITUDES

1.2.1. OBSERVABLES

Por medio de la observación de los fenómenos naturales el raciocinio humano construye las entidades utilizadas en Física; se alcanzan por un camino de abstracción que estriba en coger una cualidad común y excluir todas las demás. De esa manera, el concepto de tiempo brota de la contemplación de la duración de las cosas sujetas a cambio, cualesquiera que sean su color, tamaño y naturaleza. Lo mismo sucede con la longitud, el área y el volumen, etc.

Algunos entes físicos son **observables** mediante los sentidos (belleza, color, olor, sabor, velocidad, temperatura, longitud, fuerza, presión, etc.). Otros se conciben como causas de hechos observables. (Tal ocurre con la masa, carga eléctrica, energía, etc.). Se denomina observables tanto a unos como a otros.

La explicación del efecto observable propio de cada ente físico conforma una definición cualitativa, que no debe excluirse. Estas definiciones cualitativas son válidas para conocer de qué se trata y para reconocerlo siempre que se trate con él.

1.2.2. MAGNITUDES FÍSICAS

La física emplea observables que se pueden cuantificar, es decir, han de poder medirse. Se denomina ***magnitud física*** *a todo observable que se puede medir*. De esta definición se puede estimar que el objeto de la física es alterable, en función de que los fenómenos físicos observados sean medibles o no; de forma que el progreso en las tecnologías de instrumentación de medida, sin duda aumentan el domino de la física tomando conceptos y leyes, derivadas de estas nuevas medidas.

Por ejemplo, conforme la tecnología ha facultado medir los fenómenos vinculados al átomo, su estructura, su núcleo y sus electrones la física se ha ido ampliando hasta incluir en ella una nueva sección, la física atómica y nuclear, que trata de esto.

La longitud, tiempo, velocidad, aceleración, fuerza, masa, color, etc. son ejemplos de magnitudes físicas. La belleza, el sabor, el olor, el amor, la satisfacción, etc. son observables que no constituyen magnitudes físicas ya que no se pueden medir.

Las magnitudes pueden clasificarse en escalares, vectoriales y tensoriales, a su vez, las primeras, se pueden clasificar en extensivas e intensivas. Son magnitudes escalares aquellas que quedan determinadas por un número real, acompañado de un estado elegido de esta magnitud, de entre las magnitudes escalares extensibles se encuentran la masa, energía, tiempo, carga eléctrica, volumen, la cantidad de sustancia, resistencia eléctrica, etc. y de entre las unidades escalares intensivas, se encuentran la temperatura, densidad, volumen específico, carga específica, etc.

Las magnitudes vectoriales necesitan además el conocimiento de una dirección y un sentido, entre las cuales, se encuentran, la velocidad, aceleración, fuerza, cantidad de movimiento, campo eléctrico, etc.

Las magnitudes tensoriales son las que el valor observado de dicha magnitud depende de la dirección en que es observada. Entre dichas magnitudes se encuentran el tensor de inercia, el tensor de esfuerzos, el tensor de deformaciones, el tensor conductividad térmica, el índice de refracción, el tensor dieléctrico en medios anisótropos,...

1.3. UNIDADES Y MEDIDAS

Se denomina **cantidad** de una magnitud al estado de esa magnitud en un objeto determinado. Por ejemplo la carga eléctrica es una magnitud; la carga del electrón es una cantidad de la magnitud carga eléctrica.

Un conjunto de observables (A_0), (A_1), (A_2), ..., comparables entre sí dos a dos, son cantidades de una misma magnitud física.

Dos cantidades (A) y (B) de una misma magnitud se dice que son comparables cuando existe una definición operacional y universal de la razón:

$$\frac{(A)}{(B)} = n \qquad \textbf{1.1}$$

siendo n un número que expresa que la cantidad (A) es n veces mayor que la cantidad (B), es decir, (A)=n.(B).

En la definición de comparación, el adjetivo **operacional** señala que se han de especificar los instrumentos usados en la comparación, así como las operaciones a efectuar. El requisito de **universalidad** requiere que la razón obtenida no dependa de la naturaleza de los cuerpos utilizados en la construcción del instrumental.

Definida la razón entre cantidades, quedan definidas la igualdad y la suma, pues de:

$$\frac{(A_1)}{(A_0)} = n_1; \quad \frac{(A_2)}{(A_0)} = n_2; \quad \frac{(A_3)}{(A_0)} = n_3 \qquad \textbf{1.2}$$

Se deduce

$$(A_1) = (A_0)\ si\ \ n_1 = 1 \qquad \textbf{1.3}$$

$$(A_1) + (A_2) = (A_3)\ \ si \quad n_1 + n_2 = n_3 \qquad \textbf{1.4}$$

Recíprocamente, la definición de la razón entre cantidades, puede sustituirse por la definición de la igualdad y de la suma, si se cumple el postulado de divisibilidad indefinida.

El criterio de **igualdad** está implicado en la definición cualitativa de cada magnitud, pues es obvio admitir que dos cantidades son iguales cuando sus efectos son idénticos.

Para la suma de cantidades vale en Física el criterio de equivalencia, según el cual, la suma ha de producir por sí sola el mismo efecto que los sumandos reunidos. Se postula que el resultado es independiente de la manera como se reúnen.

Las magnitudes extensivas, se suman por acumulación, o sea yuxtaponiendo los objetos que les sirven de soporte, mientras que a las magnitudes intensivas no les es aplicable la suma por acumulación, así por ejemplo, para la densidad, al reunir dos líquidos con densidades conocidas, la densidad que resulta no es la suma de las densidades de ambos líquidos por separado. Pero la densidad sigue siendo una magnitud física, pues basta que una sustancia de masa constante se le varíe su volumen para que su densidad aumente a medida que disminuye su volumen, y por tanto se puede sin ninguna ambigüedad definir la razón entre dos densidades cualesquiera, así para un volumen dado de una sustancia la densidad se incrementará a medida que aumente la masa que ocupa la totalidad del volumen (entendiéndose una distribución de masa homogénea en el volumen considerado, en caso de no cumplirse, se tendría que estudiar en elementos diferenciales).

Para las magnitudes vectoriales, su suma se realiza mediante la regla del polígono.

La discriminación entre magnitudes y cantidades es indispensable cuando hay que concretar las ideas. Pero es habitual en Física coger lo general por lo particular, y por eso se suele hablar de magnitudes y pocas veces de cantidades, aún en el caso en que el vocablo oportuno sea este último.

Para una magnitud determinada se puede elegir una cantidad de esta magnitud como patrón, a esta cantidad se le denomina **unidad**, la comparación de cantidades de la misma magnitud con la unidad se denomina **medida**, sea la magnitud {A}, cuya unidad se representa por U_A, y sean (A_1), (A_2), cantidades de dicha magnitud, se forman las siguientes razones.

$$\frac{(A_1)}{U_A} = A_1; \quad \frac{(A_2)}{U_A} = A_2 \qquad \textbf{1.5}$$

donde A_1 y A_2 son las medidas de las cantidades (A_1) y (A_2) respectivamente con la

$$(A) = A.U_A \qquad \textbf{1.6}$$

unidad U_A, así a cada cantidad (A) le corresponde una medida A, para la unidad U_A es decir, ***cantidad = medida.unidad***

De forma que a cada cantidad (A), se asocia un número A, que representa el número de veces que (C) es mayor que la unidad. Dicho número como se ha indicado es la medida de la cantidad (A) referida a la unidad.

Cabe destacar la diferencia conceptual entre cantidad y medida, puesto que la cantidad de una magnitud física no depende de la unidad utilizada para medirla, la medida en cambio, si depende de la unidad, de forma que para una misma cantidad, cuanto menor sea la unidad que se utiliza para medirla, mayor será el valor de la medida obtenida.

Sean dos Unidades U_A y U'_A de la magnitud {A} al cambiar la unidad U_A por la U'_A se tendrá para la cantidad (A):

$$(A) = A.U_A = A.(\frac{U_A}{U'_A}).U'_A = A'.U'_A \Rightarrow A' = A.\frac{U_A}{U'_A} \Rightarrow \frac{A'}{A} = \frac{U_A}{U'_A} \qquad \textbf{1.7}$$

De donde las medidas de una misma cantidad son inversamente proporcionales a las unidades con que se han obtenido.

Las medidas pueden ser: *Directas* al comparar cada cantidad con la unidad y aplicar el criterio de igualdad y suma. *Indirectas*, aquellas que se miden las cantidades de otras magnitudes y mediante una ley física se determina la medida de la cantidad correspondiente; Y las realizadas mediante instrumentos calibrados (balanzas, cronómetros, voltímetros, etc.)

1.4. LEYES FUNDAMENTALES. CONSTANTES UNIVERSALES

Como se ha indicado las leyes físicas relacionan las magnitudes que intervienen en un fenómeno considerado, estas tienen un carácter cuantitativo, pudiéndose elegir relaciones de proporcionalidad entre potencias determinadas de las cantidades que intervienen, así:

$$(A) \propto (B)^b \bullet (C)^c \bullet \ldots \qquad \textbf{1.8}$$

que representa una relación de proporcionalidad entre cantidades, por tanto si el fenómeno en cuestión se hace x veces mayor la cantidad (B) y se mantiene constantes el resto de cantidades, la cantidad (A) queda multiplicada por x^b. Dichas relaciones de proporcionalidad entre cantidades tiene un carácter absoluto, puesto que no se introducen elementos convencionales como lo son las unidades.

Al pasar de la relación de proporcionalidad entre cantidades a la ecuación entre medidas, hay que introducir un factor proporcional, K, (este puede valer 1, en cuyo caso se dice que las magnitudes físicas que intervienen son coherentes), que dependerá en un principio de las unidades elegidas de cada magnitud, con lo que resulta

$$A = K.B^b \bullet C^c \bullet \ldots \qquad \textbf{1.9}$$

Para hallar K habrá que conocer la relación de proporcionalidad y según las unidades que se adopten, dicho valor se obtendrá al medir en diversos casos particulares las cantidades que figuran en la ecuación; pueden ocurrir dos casos:

a) Al variar la naturaleza del cuerpo con que se opere, y para el mismo conjunto de unidades, el factor de proporcionalidad varía, por lo que se dice, que K es una constante característica del cuerpo.

b) Pero puede ocurrir que dicho factor de proporcionalidad sea independiente de la naturaleza del cuerpo. Entonces se denomina **constante universal**, y a la relación entre cantidades **ley universal.**

Las constantes universales poseen un carácter desconcertante. Surgen en las leyes sin definirse a priori. Al no ser propiedades de los cuerpos o medios y no variar, no son magnitudes, puesto que sólo existe un único espécimen de cada una y por tanto no hay comparación, pero no son números fijos, porque su valor numérico depende de las unidades que se elijan para medir las cantidades que comparten con ellas las respectivas ecuaciones.

Las constantes universales trazan al ser descubiertas una nueva era científica, por tanto ejecutan en Física un función importante.

1.5. SISTEMAS DE ECUACIONES DE DEFINICIÓN. SISTEMA ACORDE DE UNIDADES

Las magnitudes se pueden relacionar con otras de forma cuantitativa, con diferentes fórmulas, así la aceleración se puede relacionar, entre otras con:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}; \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}; \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}; \quad \cdots \qquad \mathbf{1.10}$$

y por tanto se pueden elegir diferentes fórmulas que en su conjunto constituyan un sistema de ecuaciones, una vez elegidas las fórmulas, y fijado el coeficiente de cada una, se tiene un **sistema particular de ecuaciones de definición**, y debe ocurrir que al sustituir los símbolos de las magnitudes por los números que las miden con las unidades, queden satisfechas las ecuaciones. Entonces se habrá constituido un **sistema de unidades acorde** con el sistema particular de ecuaciones de definición.

Esto es posible, puesto que de todas las magnitudes se eligen un conjunto de ellas como **magnitudes fundamentales** de forma que no estén relacionadas entre sí por una ley universal; y a continuación se eligen arbitrariamente las unidades de las magnitudes fundamentales, y definiendo las unidades de las demás magnitudes de tal modo que se cumplan todas las ecuaciones del sistema particular de ecuaciones de definición.

Si en un sistema acorde de unidades se toma como magnitudes fundamentales entre otras la longitud y el tiempo, la velocidad no puede ser magnitud fundamental, puesto que existe una ley física que se relaciona con las dos anteriores, sea dicha ley física la ecuación de definición de la velocidad, tomando el metro como unidad de longitud y el segundo como unidad de tiempo, la unidad de velocidad en dicho sistema acorde de unidades debe ser necesariamente el $m.s^{-1}$, puesto que la velocidad media que debe tener un móvil para recorrer la distancia unidad en el tiempo unidad será:

$$\overline{V} = \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

1.11

$$(V)_u = \frac{(l)_u}{(t)_u} = \frac{m}{s}$$

y denominado por v_m, l_m, t_m a las medidas de las cantidades, las cantidades valdrán:

$$(v) = v_m.(v)_u \,;\, (l) = l_m.(l)_u \,;\, (t) = t_m.(t)_u$$

$$v_m.(v)_u = v_m.\frac{(l)_u}{(t)_u} = (v) = \frac{(l)}{(t)} = \frac{l_m}{t_m}.\frac{(l)_u}{(t)_u} \qquad \textbf{1.12}$$

$$v_m = \frac{l_m}{t_m}$$

Y así se obtendría un sistema coherente, ya que las ecuaciones quedarán satisfechas con los números.

Cada sistema coherente de unidades se corresponde con un sistema particular de ecuaciones de definición, y por lo tanto para caracterizarlo no basta con dar las unidades fundamentales, siendo necesario además, el sistema de ecuaciones de definición, con los valores de los coeficientes y con su expresión verbal.

Las magnitudes cuyas unidades se definen a partir de las fundamentales mediante el sistema de ecuaciones de definición, se denominan derivadas.

1.6. SISTEMAS FÍSICOS DE UNIDADES

Aunque parezca sorprendente, sólo son necesarias tres magnitudes fundamentales para el estudio de la mecánica, en los sistemas físicos se elige como magnitudes fundamentales mecánicas *longitud*, *masa* y *tiempo*. Al estudiar la termodinámica se necesitan dos magnitudes fundamentales más, estas son *cantidad de materia* y *temperatura*, para el estudio de la electricidad es necesario introducir otra magnitud fundamental, en la mayoría de los sistemas físicos se elige como magnitud fundamental a la *intensidad de corriente eléctrica*, aunque en otros sistemas físicos, los electrostáticos, toman como magnitud fundamental la *carga eléctrica*, con la fotometría resulta necesario introducir una séptima magnitud fundamental, se elige a la *intensidad luminosa*.

De entre los sistemas acordes de unidades cabe destacar el **Sistema Internacional** de Unidades, que se estudiará más adelante con mayor detalle, el sistema **cgs**, que a su vez se divide en sistema **electrostático** y sistema **electromagnético**, el sistema **mts** y el sistema **fps**.

El sistema cegesimal o cgs (centímetro, gramo, segundo) toma como unidades mecánicas fundamentales el centímetro, 1 cm=10^{-2} m; el gramo, 1 g=10^{-3} kg; y el segundo. Las unidades derivadas que tienen un nombre especial son: la dina, 1 din=10^{-5} N, que es la unidad de Fuerza; el ergio, 1 erg=10^{-7} J, unidad de Energía; y la baria, 1 baria=0'1 Pa, unidad de presión.

El sistema mts (metro, tonelada, segundo) fue el sistema legal en Francia durante algunas décadas aunque no tuvo nunca la aprobación de los físicos. Sus unidades mecánicas fundamentales son el metro; la tonelada métrica, 1 t=10^3 kg; y el segundo. Las unidades derivadas que tienen un nombre especial son: el steno, 1 sn=10^3 N, que es la unidad de Fuerza; el kilojulio, 1 kJ=10^3 J, unidad de Energía; el kilovatio, 1 kW=10^3 W unidad de potencia; y la pieza, 1 pz=10^3 Pa, unidad de presión.

El sistema fps (foot, pound, second) (pie, libra, segundo) sistema físico utilizado principalmente en el mundo anglosajón. Sus unidades mecánicas fundamentales son el pie, 1 ft=0'3048 m; la libra, 1 Lb=0'45359 kg; y el segundo. El poundal como unidad de fuerza es la unidad derivada con nombre especial 1 poundal = 0'138254 N.

1.7. SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES. UNIDADES FUNDAMENTALES

El sistema internacional (S.I.) está formado por las unidades del sistema mksA racionalizado (metro, kilogramo, segundo, amperio), y lleva definiciones adicionales para la unidad de temperatura, la unidad de intensidad luminosa y la unidad de cantidad de sustancia.

Este sistema de unidades fue adoptado oficialmente por España en 1967 (B.O.E. de 10-11-1967). La última modificación se ha publicado en el BOE del 21 de enero de 2010. Las unidades fundamentales mecánicas son el metro (m) para la longitud, el kilogramo (kg) para la masa y el segundo (s) para el tiempo.

La masa unidad, es decir, el **kilogramo** se definió en 1901 (3ª conferencia general de Pesas y Medidas), como *la masa de un bloque cilíndrico de platino iridiado, cuya altura y diámetro son iguales y que está depositado en el pabellón de Breteuil de la Oficina Internacional de Pesas y Medidas de Sèvres*.

La unidad de longitud, el **metro** definido, por última vez, en 1983 (17ª conferencia) como *la longitud del trayecto recorrido en el vacío por la luz durante un intervalo de* $\frac{1}{299792458}$ *de segundo*.

El **segundo**, unidad de tiempo, definido en 1967 (13ª conferencia) se define como *la duración de 9 192 631 770 períodos de radiación correspondiente a la transición entre los niveles hiperfinos del estado fundamental del isótopo 133 de cesio*.

El **Amperio** (**A**), quedó definido en 1948 (9ª conferencia) como *la intensidad de una corriente constante que, mantenida en dos conductores paralelos, rectilíneos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y situados a una distancia de un metro el uno del otro en el vacío, produce entre estos conductores una fuerza igual a* 2.10^{-7} *N por metro de longitud.*

La unidad de temperatura es el **Kelvin** (K) definido en 1967 (13ª conferencia) como *la unidad de temperatura termodinámica que corresponde a* $\frac{1}{273'16}$ *de la temperatura termodinámica del punto triple del agua*.

La unidad de intensidad luminosa denominada **candela** (cd) (13ª conferencia) es la intensidad luminosa, en una dirección dada, de una fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia igual a $540x10^{12}$ hercios y cuya intensidad energética radiada en dicha dirección es 1/683 vatios por estereoradián

El **mol** es la unidad de cantidad de sustancia, que fue definida en 1971 (17ª c. g. P. y M.) como *la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos hay en 0'012 kilogramos de carbono 12*.

Junto a la palabra mol, se ha de especificar las entidades elementales, que pueden ser, átomos, moléculas, iones, electrones, etc.

El Sistema Internacional, al igual que el resto de sistemas admiten múltiplos y submúltiplos de las unidades, para ello se añaden al nombre de la unidad el prefijo adoptado, por acuerdo internacional, los cuales se encuentran en la tabla I.

Tabla I

Factor	***Prefijo***	***Símbolo***
10^{24}	Yolta	Y
10^{21}	Zetta	Z
10^{18}	Exa	E
10^{15}	Peta	P
10^{12}	Tera	T
10^{6}	Mega	M
10^{9}	Giga	G
10^{3}	Kilo	K
10^{2}	Hecto	H
10	Deca	Da
10^{-1}	Deci	D
10^{-2}	Centi	C
10^{-3}	Mili	M
10^{-6}	Micro	M
10^{-9}	Nano	N
10^{-12}	Pico	P
10^{-15}	Femto	F
10^{-18}	Atto	A
10^{-21}	Zepto	Z
10^{-24}	Yocto	Y

No se admiten los prefijos compuestos formados por la yuxtaposición de varios prefijos, así los múltiplos o submúltiplos de la unidad fundamental de masa del S.I. serán múltiplos del gramo, es decir, 1000 veces dicha unidad será el megagramo (Mg) y no el kilokilogramo (kkg), algunos múltiplos o submúltiplos de las unidades del Sistema Internacional tienen un nombre propio, de los cuales los más habituales son los que se encuentran reflejados en la tabla II.

Tabla II

unidad	*Nombre con prefijo*	*Equivalente S.I.*
Micra (μ)	Micrómetro (μm)	10^{-6} m
milimicra (mμ)	Nanómetro (nm)	10^{-9} m
Ångströn (Å)	-	10^{-10} m
Fermi	Femtometro (fm)	10^{-15} m
Tonelada	Megagramo (Mg)	10^{3} kg
Bar	Megabaria (Mbaria)	10^{5} Pa

1.8. UNIDADES DERIVADAS EN EL SISTEMA INTERNACIONAL

En el sistema Internacional existe una serie de unidades derivadas que tienen nombre propio estas son: *Radián* (**rad**) unidad de ángulo plano; *Estereoradián* (**sr**) unidad de ángulo sólido; *Hercio* (**Hz**), 1 Hz=1 s^{-1} unidad de frecuencia; *Newton* (**N**), 1 N=1 kg.m.s^{-2} unidad de fuerza; *Pascal* (**Pa**), 1 Pa=1 N.m $^{-2}$, unidad de presión; *Julio* (**J**), 1 J=1 N.m, unidad de energía, de trabajo y de cantidad de calor ; *vatio* (**W**), 1 W=1 J.s^{-1}, unidad de potencia; *Culombio* (**C**), 1 C=1 sA, unidad de carga eléctrica y de cantidad de electricidad; *Voltio* (**V**), 1 V=1 W.A^{-1}, unidad de diferencia de potencial y de fuerza electromotriz; *Faradio* (**F**), 1 F=1 C.V $^{-1}$, Unidad de capacidad eléctrica; *Ohmio* (**Ω**), 1 Ω=1 V.A^{-1}, unidad de resistencia eléctrica; *Siemens* (**S**), 1 S=1 Ω^{-1}=1 A.V^{-1}, unidad conductancia eléctrica; *Weber* (**Wb**), 1 Wb=1 Vs, unidad de flujo magnético o flujo de inducción magnética; *Tesla* (**T**), 1 T=1 Wb.m^{-2}, unidad de densidad de flujo magnético o inducción magnética; *Henrio* (**H**), 1 H=1 Wb.A^{-1}, unidad de industancia; *Grado Celsius* (**°C**), 1 °C=1 K, unidad de temperatura celsius; *Lumen* (**lm**), 1 lm=1 cd sr; *Lux* (**lx**), 1 lx=lm.m^{-2}, unidad de iluminancia; *Becquerel* (**Bq**), 1 Bq=1 s^{-1}, unidad de actividad de un radionucleido; *Gray* (**Gy**), 1 Gy=1 J.kg^{-1}, unidad de dosis absorbida, de energía másica (comunicada) y de kerma; *Sievert* (**Sy**), 1

Sy=1 J.kg^{-1}, unidad de dosis equivalente, de dosis equivalente ambiental, de dosis equivalente direccional y de dosis equivalente individual; *Katal* (**kat**) 1 kat=1 mol.s^{-1}, unidad de actividad catalítica.

Las dos primeras unidades derivadas de las indicadas con nombre propio en el párrafo anterior son especiales, al igual que existen otras magnitudes como el índice de refracción y la permeabilidad relativa, que no recibe nombre especial, además existe otras dos con nombre especial que se aplica a muchas magnitudes estas unidades son el *Belio* (**B**) y el *Nepe*r (**Np**), el Belio lo definimos como el logaritmo decimal del cociente de dos cantidades de una misma magnitud y el Neper al neperiano, (ambas son no pertenecientes al SI pero de aplicación en sectores específicos), Estudiemos algo más las unidades radián y esteroradián. (Ambas antes de las 20ª conferencia eran consideradas suplementarias y a partir de 1995 se consideran derivadas, dicha consideración se ha publicado en España por primera vez en 2010 BOE de 12 de enero).

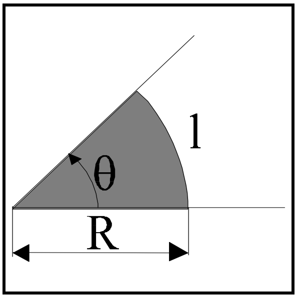

Figura 1.1

El radian se define como *el ángulo plano que, teniendo su vértice en el centro de un círculo, intercepta sobre la circunferencia de este círculo, un arco de longitud igual a la del radio*.

Es decir un ángulo expresado en radianes responde al siguiente proceso, se traza una circunferencia de radio R cuyo centro O coincida con el vértice del ángulo. El ángulo θ en radianes es la razón:

$$\theta = \frac{l}{R} \qquad \textbf{1.13}$$

siendo l la longitud del arco abarcado por el ángulo θ.

Análogamente el ángulo sólido es la región del espacio constituida por todas las semirrectas con origen común O y que tienen un punto en común también con un casquete esférico de una esfera de radio R y centro el origen O. Su valor, expresado en estereorradianes, está dado por:

$$\Omega = \frac{S}{R^2} \qquad \textbf{1.14}$$

siendo S el área del casquete esférico interceptado por el ángulo sólido.

Conforme con 1.14 el estereorradian se define como *el ángulo sólido que, teniendo su vértice en el centro de una esfera, delimita sobre la superficie esférica correspondiente un área igual a la de un cuadrado que tiene como lado el radio de la esfera*.

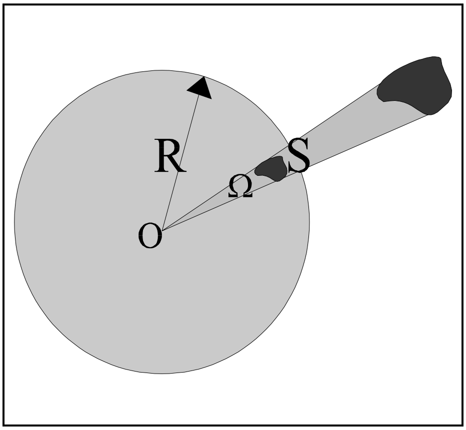

Figura 1.2

El ángulo plano correspondiente a todo el plano será aquel que su arco es toda la circunferencia, y por 1.13

$$\theta_t = \frac{2.\pi.R}{R} = 2.\pi \ rad \qquad \textbf{1.15}$$

que son los radianes equivalentes a 360^0 sexagesimales. En conclusión:

$$1^0 = \frac{2.\pi}{360} = 0{,}017453\, rad; \ 1 rad = \frac{180}{\pi} = 57^o \quad 17' \quad 44{,}8'' \qquad \textbf{1.16}$$

Similarmente, el ángulo sólido correspondiente a todo el espacio será:

$$\Omega_T = \frac{4.\pi.R^2}{R^2} = 4.\pi \ sr \qquad \textbf{1.17}$$

Obviamente la definición de ángulo sólido se ha hecho utilizando el área interceptada por la superficie de una esfera situada con su centro en el vértice del ángulo, pero frecuentemente habrán situaciones en que la superficie será irregular, de forma que tomando un elemento de área dS no será perpendicular a la recta que lo una con el vértice, formando su vector normal un cierto ángulo plano θ con dicha recta, entonces, es imprescindible proyectar el elemento de superficie sobre un plano perpendicular a la recta, obteniendo como consecuencia de dicha proyección el elemento de área dS' (dS'=dS.cosθ), y el ángulo sólido elemental dΩ será:

$$d\Omega = \frac{d'S}{R^2} = \frac{dS.\cos\theta}{R^2} \qquad \textbf{1.18}$$

y por tanto el ángulo sólido subtendido en O por la superficie total se obtiene como resultado de la integración de 1.18 extendida a toda la superficie:

$$\Omega = \iint_S \frac{dS.\cos\theta}{R^2} \qquad \textbf{1.19}$$

En la próxima lección se podrá definir el ángulo sólido en función del vector superficie, y se podrá también definir el vector ángulo plano, como un vector axial.

1.9. OTRAS UNIDADES INTERNACIONALES

Hay unidades de uso internacional no pertenecientes al SI cuyo uso con el Sistema Internacional está aceptado, dado que son ampliamente utilizadas en la vida cotidiana y cada una de ellas tiene una definición exacta en unidades SI. Incluye las unidades tradicionales de tiempo y de ángulo. Contiene también la hectárea, el litro y la tonelada, que son todas de uso corriente a nivel mundial, y que difieren de las unidades SI coherentes correspondientes en un factor igual a una potencia entera de diez. Los prefijos SI se emplean con varias de estas unidades, pero no con las unidades de tiempo. En la tabla III se encuentran estas unidades.

Tabla III

Magnitud	Nombre de la unidad	Símbolo	Valor en unidades SI
Tiempo	Minuto	min	1 min = 60 s
	Hora	h	1 h = 60 min=3600 s
	Día	d	1 d=24 h =86400 s
Ángulo plano	Grado	º	1º=π/180 rad
	Minuto	’	1’=(1/60)º=(π/10800) rad
	Segundo	”	1”=(1/60)’=(π/648000) rad
Área	Hectárea	ha	1 ha=1hm^2=10^4 m^2
Volumen	Litro	L, l	1 L=1 dm^3=10^{3}cm^3=10^{-3}m^3
Masa	Tonelada	t	1 t=10^3 kg

Existen unas unidades múltiplos o submúltiplos de las internacionales con nombre propio, algunas de las cuales se encuentran en la tabla IV

Tabla IV

Unidad	Nombre con prefijo	Relación
Micra (μ)	micrómetro (μm)	10^{-6} m
milimicra (mμ)	nanómetro (nm)	10^{-9}m
Ångströn (Å)		10^{-10} m
Fermi	femtométro (fm)	10^{-15}m
bar	megabaria (Mbaria)	10^{5} Pa

Además habrá que incluir las unidades obtenidas experimentalmente y por último las unidades de uso en sectores especializados, como las indicadas en la tabla V

Tabla V

Magnitud	Unidad		
	Nombre	Simbolo	equivalencia
Distancia	Milla naútica	M	1M=1852 m
Área de las fincas	área	A	1 a = 10^{2} m^{2}
Potencia sistema ópticos	dioptría		1 dioptría = 1 m^{-1}
Masa de las piedras preciosas	quilate métrico		1 quilate métrico=2.10^{-4} kg
Masa longitudinal de las fibras textiles	tex	Tex	1 tex =10^{-6} kg.m^{-1}
Velocidad	nudo	Kn	1 kn =(1852/3600) m/s
Presión sanguínea y otros fluidos	mm de mercurio	mm Hg	1 mm Hg = 133322 Pa
Sección eficaz	barn	B	1 b = 10^{-28} m^{2}

1.10. SISTEMAS TÉCNICOS DE UNIDADES

Los sistemas técnicos de unidades, aunque tienden a desaparecer, todavía se utiliza en las tecnologías, las magnitudes mecánicas fundamentales de estos sistemas son

longitud, **fuerza**, y **tiempo**, apareciendo la masa como magnitud derivada, siendo su ecuación de definición:

$$m = \frac{f}{a} \tag{1.20}$$

De entre los sistemas acordes de unidades cabe destacar el **Sistema técnico decimal** de Unidades y el sistema **inglés.**

El sistema técnico decimal toma como unidades mecánicas fundamentales el metro como unidad de longitud; el kilogramo como unidad de fuerza; y el segundo como unidad de tiempo. El kilogramo se define como el peso del kilogramo patrón en un punto en que la aceleración de la gravedad sea la normal, por acuerdo adoptado en la 13ª conferencia general de pesas y medidas celebrada en 1968, se toma como valor normal el de la gravedad en Postdam (latitud $52^0 29'$ Norte), es decir, g=9'81260 m.s^{-2}, se eligió Postdam por estar situado en ella uno de los más destacados laboratorios de medidas gravitatorias.

La relación entre el kilogramo y el Newton se deduce fácilmente, puesto que:

El peso en Postdam de una masa de 1 Kg será:

a) Sistema técnico decimal: P= 1 kg

b) Sistema internacional: $P=m.g=1_x 9'81=9'81$ N

De donde:

$$1\,kg = 9'81N \tag{1.21}$$

En el sistema técnico, la unidad de masa no tiene nombre especial, denominándola **unidad técnica de masa (UTM)** y de la ecuación de definición se tiene:

$$1\,UTM = \frac{1\,kg}{1\,m.s^{-2}}$$

1.22

$$1\,UTM = \frac{9'81\,N}{1\,m.s^{-2}} = \frac{9'81\,kg.m.s^{-2}}{1\,m.s^{-2}} = 9'81\,kg$$

Es decir, la UTM es 9'81 veces más grande que la masa de 1 kg.

En algunos textos la unidad kilogramo cuando se trata de la magnitud fuerza se le denomina kilopondio, o kilopeso. La unidad de trabajo se le denomina kilográmetro (kgm) (también se conoce dicha unidad como kilopondímetro).

El sistema inglés es el utilizado principalmente en el mundo anglosajón. Sus unidades mecánicas fundamentales son: el pie, 1 ft=0'3048 m para la longitud; la libra, 1 Lb=0'45359 kg para la fuerza; y el segundo como unidad de tiempo. El slug como unidad de masa es la unidad derivada con nombre especial, 1 slug = 1'488 UTM = 14'59 kg = 32'174 lb.

1.11. OTRAS UNIDADES MECÁNICAS

Existen otras unidades utilizadas con frecuencia pero que no pertenecen a ninguno de los sistemas mencionados anteriormente, en el apéndice 2 se encuentran las equivalencias más frecuentes, de ellas se destacan las siguientes:

- *Unidades de longitud*

  La pulgada: 1 pulg = 0'0254 m

  La milla: 1 mi = 1609 m

  La Yarda: 1 yd = 3 ft = 0'9144 m

- *Unidades de área*

  El acre: 1 acre = 43560 ft^2 = 4046'86 m^3

- *Unidades de volumen*

  El cuartillo: 1 qt = 946.10^{-6} m^3

  El galón británico: 1 galón br= $4'49661.10^{-3}$ m^3

  El galón (E.E.U.U.): 1 galón = $3'785.10^{-3}$ m^3

- *Unidades de velocidad*

  El kilómetro/hora: 1 $km.h^{-1}$ = 0'2778 $m.s^{-1}$

  La milla/hora: 1 $mi.h^{-1}$ = 1'467 $ft.s^{-1}$ = 1'609 $km.h^{-1}$ = 0'447 $m.s^{-1}$

- *Unidades de fuerza*

  La tonelada (EEUU): 1 ton = 907'2 kg= 8896'91 N

  La tonelada grande: 1 t_{grande} = 1016 kg = 9964'52 N

  La onza: 1 oz= 0'0625 lb = 0'02835 kg = 0'278 N

- *Unidades de energía*

  La caloría: 1 cal = 4'186 J

  La unidad térmica británica: 1 BTU =778 ft.lb =1055 J

  El kilovatio hora: 1 kw.h = $3'6.10^6$ J

  El electrón voltio: 1 eV = $1'602.10^{-19}$ J

- *Unidades de Potencia*

  El caballo de Vapor: 1 CV = 75 kgm.s^{-1} = 735'75 W

  El caballo fuerza: 1 HP = 550 ft.Lb.s^{-1} = 1'01387 CV = 76'04 kgm.s^{-1} = = 745'95 W

- *Unidades de Presión*

  La libra.pulgada^{-2}: 1 lb.pulg^{-2}=6895 Pa

  La atmósfera: 1 at = 101321'6 Pa

  La atmósfera técnica: 1 kg.cm^{-2} = 98100 Pa

  El metro columna de agua: 1 m_{H2O} = 9810 Pa

  El torricelli: 1 torr = 133'3179 Pa

1.12. ERRORES DE MEDICIÓN

En todas las ciencias aplicadas se trabaja con datos numéricos adquiridos con medidas y observaciones que nunca son totalmente precisas; como causa de que tanto los instrumentos de medida no son perfectos, como que los sentidos no son absolutamente perspicaces. Por otra parte, en muchas ocasiones participan en las fórmulas números irracionales, como $\sqrt{2}$, π, e, etc., que no pueden tomarse con todas las cifras, sino que se deben simplificar, quedando limitada su introducción a cierto número de cifras decimales. Todo esto condiciona los resultados, que, por tanto, no serán precisos y estarán afectados de cierta **incertidumbre** que se hace necesario determinar en cada caso, pues ésta señala la calidad de la medida efectuada, y debe seguir al resultado en todos los casos. Por ejemplo, no es lo mismo facilitar el resultado de una pesada en la siguiente manera 4'24±0'01 g que en esta otra: 4'240±0'001 g, pues la primera expresa que la pesada posee una cifra decimal garantizada, mientras que la segunda tiene dos. En ambos casos ±0'01 g y ±0'001 g definen respectivamente, la incertidumbre de las medidas. La aproximación con que se ha de realizar una medida, es decir, la incertidumbre del resultado, es función del fin que se desee y del origen mismo de la medida, pero, en último término, lo interesante es preverla de antemano, como error máximo que puede vincular al resultado.

Saber el error que se incurre en una medida tiene también una gran importancia para decidir el mínimo número de cifras decimales que hay que conservar de un número irracional para evitar cálculos desagradables e inservibles.

1.12.1. CLASIFICACIÓN DE LOS ERRORES

Los errores se pueden clasificar según su causa: en sistemáticos y accidentales; según su expresión en absolutos y relativos.

1.12.1.1. Sistemáticos y accidentales

Los errores sistemáticos están causados por un vicio del aparato de medida o por una propensión equivocada del observador, y por tanto se muestran siempre en un sentido; sólo se pueden evidenciar cambiando de instrumento de medida o de observador.

Los errores accidentales son los provocados por pequeñas causas no cuantificables e imposibles de controlar, que modifican, tanto en un sentido como en otro, los valores encontrados. Como pueden ser, por ejemplo, minúsculas alteraciones de la temperatura, presión o sencillamente la imperfección de los sentidos y métodos de medida. Este tipo de errores, que no son evitables, se pueden nivelar asumiendo como medida, por ejemplo, la media aritmética de una serie de medidas.

Los errores accidentales no pueden observarse para las medidas aisladas, ya que su reparto está subordinado a las leyes del azar, y sólo cabe designar un límite superior que está fijado por la sensibilidad de las medidas efectuadas.

La media aritmética de una serie de medidas de una misma cantidad de una magnitud está afectada por un error menor que cualquiera de los resultados individuales.

1.12.1.2. Errores absoluto y relativo

Un error de un centímetro incurrido en la medida de una longitud de algunos centímetros es inaceptable, mientras que el mismo error al medir la distancia entre dos puntos de una carretera que distan varios kilómetros carece de importancia. De ahí la necesidad de considerar el error absoluto y relativo de una medida.

Se denomina error absoluto propio de una medida, o de un número real aproximado, a la diferencia, con su signo, entre el valor aproximado, y el que se estime como correcto puesto que el valor exacto es desconocido:

$$\varepsilon_i = \Delta x_i = x_i - x \qquad \textbf{1.23}$$

En la práctica, como se ha mencionado anteriormente, se toma como correcto el valor medio de un gran número de observaciones o simplemente se asigna al error absoluto un cierto valor o cota superior (o se opta por la menor cantidad capaz de ser medida con el utensilio empleado). Por ejemplo, cuando se mide una longitud con una regla graduada en milímetros se admite que $|\varepsilon_i| \leq 0'001$ m, o cuando se toma el número $\pi=3'1415927$, se sabe que $|\varepsilon_\pi| \leq 0'0000001$.

Como se ha apuntado, el error absoluto no es útil para apreciar el grado de aproximación o exactitud de una medida; por ello es obligatorio acudir al error relativo, que se define como el valor absoluto del cociente de dividir el error absoluto por el valor de la magnitud, o número exacto que se mide:

$$\varepsilon_{r_i} = \left|\frac{\varepsilon_i}{x}\right| = \frac{|\varepsilon_i|}{x} \qquad \textbf{1.24}$$

La segunda igualdad de 1.24 se entiende que es para valores positivos de la medida o número exacto.

Como el valor exacto es, en general, desconocido se calcula el límite superior del error relativo dividiendo la cota del error absoluto por el número que resulta sustituyendo por ceros todas las cifras que siguen a la primera significativa del número aproximado. Así, por ejemplo, el error relativo cometido al tomar el número con cuatro cifras decimales será:

$$\varepsilon_r = \frac{0'0001}{2'7183} \approx \frac{0'0001}{2'0000} = 0'00005 \qquad \textbf{1.25}$$

Frecuentemente, los errores relativos se exponen en porcentaje. El resultado anterior sería de un 0'005 %.

1.12.2. CÁLCULO DEL ERROR EN LAS MEDIDAS INDIRECTAS

Muchas veces se plantea el problema de averiguar el error cometido en la determinación de una cantidad de una magnitud cuando, no siendo posible medirla directamente, se ha recurrido a la medida de otras ligadas a aquélla por una expresión conocida. Para resolverlo hay que conocer los límites de error de las magnitudes que se miden y aplicar el cálculo infinitesimal, hallando la diferencial de función, considerando los errores como diferenciales, o incrementos físicamente pequeños. Sea la función z=f(x, y, ...), entonces:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}.dx + \frac{\partial f}{\partial y}.dy + \ldots \qquad \textbf{1.26}$$

y asimilando las diferenciales a errores de medida:

$$\varepsilon_z = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\varepsilon_x\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\varepsilon_y\right| + \ldots \qquad \textbf{1.27}$$

se obtiene la expresión fundamental del cálculo de errores en las medidas indirectas; en ella ε_x, ε_y, ..., representan los errores absolutos cometidos en la medida de x, y, ..., y ε_z el error absoluto de que vendría afectada la determinación de z.

En algunos casos se puede utilizar la derivada logarítmica de la función, especialmente cuando se trata de funciones monomias.

Sea f una función monomia, de forma que $z=k.x^{\alpha}.y^{\beta}....$, donde k es un coeficiente real, y los exponente α, β ... son números racionales, entonces:

$$\ln z = \ln k + \alpha . \ln x + \beta . \ln y + ... \qquad \textbf{1.28}$$

y diferenciando, y asimilando las diferenciales a errores de medida:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dk}{k} + \alpha . \frac{dx}{x} + \beta . \frac{dy}{y} + ...$$

$$\left| \frac{\varepsilon_z}{z} \right| = \left| \frac{\varepsilon_k}{k} \right| + \left| \alpha . \frac{\varepsilon_x}{x} \right| + \left| \beta . \frac{\varepsilon_y}{y} \right| + ... \qquad \textbf{1.29}$$

$$\varepsilon_{r_z} = \varepsilon_{r_k} + |\,\alpha\,| . \varepsilon_{r_x} + |\,\beta\,| . \varepsilon_{r_y} + ...$$

Donde se obtiene que para dicho tipo de funciones resulta muy fácil obtener el error relativo de la magnitud a determinar, para que el coeficiente k no aumente los errores inevitables, se elige dicho coeficiente con un número de cifras decimales tal que su error relativo sea mucho menor que el error relativo producido por las magnitudes, normalmente se impone que el error relativo de los números aproximados sea menor que la décima parte del error relativo total que se obtiene por las magnitudes, es decir:

$$\varepsilon_{r_k} < 0'1.(|\,\alpha\,| . \varepsilon_{r_x} + |\,\beta\,| . \varepsilon_{r_y} + ...) \qquad \textbf{1.30}$$

Por ejemplo para determinar el valor que hay que tomar de π si $\varepsilon_{r\pi}$<0'005, ε_π<0'005.3=0'015 (3 primera cifra significativa), y por tanto basta con tomar ε_π=0'01, lo que implica π=3'14±0'01, puesto que el error relativo que se comete es $\varepsilon_{r\pi}$ = 1/300 = 0'0033 < 0'005.

1.12.3. TEORÍA DE ERRORES: CURVA DE GAUSS

Cuando se realizan un gran número de medidas de una misma cantidad de una magnitud, los errores individuales de cada medida se distribuyen entre una gran diversidad de valores; todos los errores son posibles, aunque siempre son menos probables, es decir, menos frecuentes, los de mayor valor absoluto.

Si se representa el número de veces en que el error se encuentra en cada uno de los distintos intervalos, o más correctamente, la probabilidad o frecuencia relativa n/N=f(ε) de cada error, en función del error absoluto (ε), se obtiene una curva en forma de campana, mucho más perfecta y continua a medida que aumente el número de medidas realizadas. Esta curva, conocida como curva de **Gauss** (*Gauß*), está representada en la figura 1.3; la curva b pertenece a un buen conjunto de medidas, es decir, con pequeña dispersión, mientras que la a representa una serie con mayores errores, o sea, la dispersión es mayor.

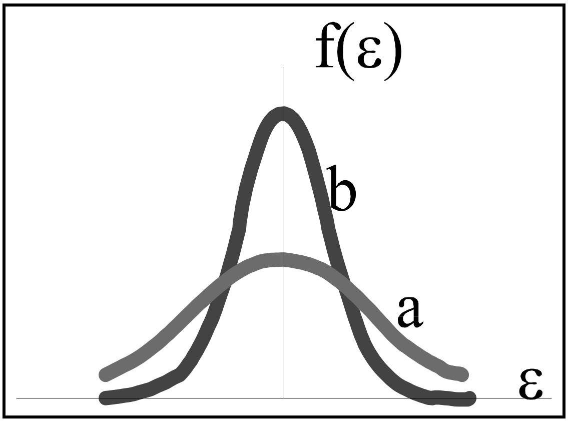

Figura 1.3

La curva de Gauss, o de **distribución normal** de los errores, tiene una ecuación que no se deducirá en esta asignatura, la

$$\frac{n}{N} = f(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{2.\pi}} \cdot e^{\frac{(h.\varepsilon)^2}{2}} \qquad \textbf{1.31}$$

cual se expresa por:

Lógicamente f(ε).dε es la frecuencia o probabilidad de que una medida individual tenga un error comprendido entre ε-dε/2 y ε+dε/2; como la probabilidad de que el error tome algún valor, es decir, esté comprendido entre -∞ y +∞, es la unidad, debe cumplirse que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\varepsilon).d\varepsilon = 1 \qquad \textbf{1.32}$$

El parámetro h define la mayor o menor altura del valor central de la curva que será el máximo y, por tanto, da una idea de la precisión de las medidas; cuanto mayor sea h mayor será la altura de la ordenada máxima, lo que significa que en el conjunto de medidas sólo son muy probables los errores pequeños.

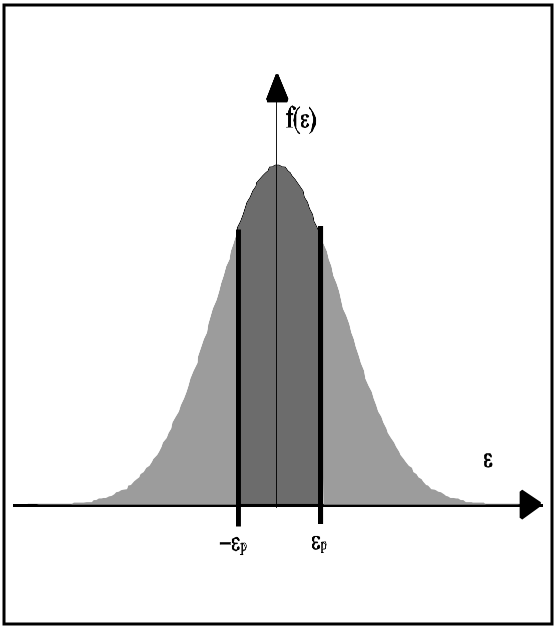

Figura 1.4

El valor de ε_p para el cual $\int_{\varepsilon_p}^{\varepsilon_p} f(\varepsilon).d\varepsilon = 0'5$ se denomina error probable, es el error para el que son igualmente probables los errores superiores y los inferiores a él. Es decir en la figura 1.4, las áreas oscura y semioscura son iguales. Dicho error probable está relacionado con el parámetro h de la curva por: $h.\varepsilon_p$=0'674438

Habitualmente se expresa la calidad de una serie de medidas recurriendo al error medio $\overline{\varepsilon}$ y al error standard σ, el primero es la media de los valores absolutos de los errores:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\sum n.|\varepsilon|}{N} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon.\frac{h}{\sqrt{2.\pi}}.e^{-\frac{(h.\varepsilon)^2}{2}}.d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{2.\pi}.h} \qquad \textbf{1.33}$$

Se define la varianza de un conjunto de errores, σ^2, como la media de los cuadrados

$$\sigma^2 = \frac{\sum n.\varepsilon^2}{N} = \frac{1}{h^2} \qquad \textbf{1.34}$$

de los errores

Es decir $\sigma = \frac{1}{h}$, y por tanto 1.31 se puede expresar:

$$\frac{n}{N} = f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2.\pi.\sigma^2}}.e^{-\frac{(\frac{\varepsilon}{\sigma})^2}{2}} \qquad \textbf{1.35}$$

llamando f_n a la distribución normal de varianza unidad, y denominado $z=\varepsilon/\sigma$ se tiene:

$$\frac{n}{N} = f(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2.\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{f_n(z)}{\sigma} \qquad \textbf{1.36}$$

Así, para expresar la calidad de las medidas, se emplea el error standard; de cualquier forma, hallado uno de los parámetros característicos de la curva de Gauss (h, ε_p, $\overline{\varepsilon}$, σ^2 o σ) se pueden obtener los demás. Por ejemplo dado que el cálculo del error medio es muy sencillo, se suele deducir de éste el standard:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.\overline{\varepsilon} = 1'25.\overline{\varepsilon} \qquad \textbf{1.37}$$

El error standard, goza de un sentido práctico que lo hace muy interesante para determinar la calidad de la serie de medidas; la probabilidad de que una medida, tenga un error individual comprendido entre $\pm\sigma$ es del 68 %; la de que esté incluido entre $\pm 2.\sigma$, es del 98 % y, sólo hay una probabilidad del 0'3 % de que el error se salga del límite marcado por $\pm 3.\sigma$

1.13. ECUACIONES DIMENSIONALES

El Barón **Jean Batiste Fourier** (1768-1830) aplicó a las magnitudes físicas la idea geométrica de dimensión, y por ello se le debe admitir como el precursor del Análisis dimensional.

En su obra "***Théorie Analytique de la Chaleur***" fija de un modo claro y rotundo el concepto de dimensión.

Los conceptos desarrollados por Fourier fueron aprovechados con gran éxito a finales del siglo XIX por **Osborne Reynolds** (1842-1912), **Lodge**, **Fitzgerald**, **Rücker**, **Jean** y muy especialmente por **Lord Rayleigh (J. W. Strutt)** (1842-1919). Primero fueron aplicadas para probar la homogeneidad de las ecuaciones con el fin de descubrir errores de cálculo, y posteriormente, se empleó el Análisis dimensional, por idea de Rayleigh, a la determinación de problemas cuyo tratamiento directo presentaba dificultades matemáticas insuperables. Lord Rayleigh utilizó por primera vez las magnitudes con exponentes adimensionales en la mecánica de fluidos y es por lo que se le considera junto a Fourier, cofundador del análisis dimensional.

Las ecuaciones de dimensiones, facultan para decir, como varía cada una de las unidades derivadas de un sistema acorde, cuando varían las unidades fundamentales.

Sea, la ecuación de definición de la magnitud A, siendo K un número puro:

$$A = K.B^{\beta}.C^{\gamma}.D^{\delta} \qquad \textbf{1.38}$$

Admitiendo un sistema cualquiera de unidades, en que las unidades de A, B, C, y D son respectivamente (A_1), (B_1), (C_1) y (D_1), unas cantidades de esas magnitudes serán $(A)=a_1.(A_1)$, $(B)=b_1.(B_1)$, $(C)=c_1.(C_1)$, $(D)=d_1.(D_1)$; si el sistema es acorde ha de verificarse:

$$a_1 = K.b_1^{\beta}.c_1^{\gamma}.d_1^{\delta} \qquad \textbf{1.39}$$

Con otras unidades (A_2), (B_2), (C_2) y (D_2), las mismas cantidades de esas magnitu-des serán $(A)=a_2.(A_2)$, $(B)=b_2.(B_2)$, $(C)=c_2.(C_2)$, $(D)=d_2.(D_2)$ y si estas unidades también son de un sistema acorde, que tiene, en un principio, el mismo sistema particular de ecuaciones de definición que el anterior, se ha de verificar:

$$a_2 = K.b_2^{\beta}.c_2^{\gamma}.d_2^{\delta} \qquad \textbf{1.40}$$

resultando:

$$\frac{a_1}{a_2} = \left[\frac{b_1}{b_2}\right]^{\beta}.\left[\frac{c_1}{c_2}\right]^{\gamma}.\left[\frac{d_1}{d_2}\right]^{\delta} \qquad \textbf{1.41}$$

o sea:

$$\frac{(A_2)}{(A_1)} = \left[\frac{(B_2)}{(B_1)}\right]^{\beta}.\left[\frac{(C_2)}{(C_1)}\right]^{\gamma}.\left[\frac{(D_2)}{D_1}\right]^{\delta} \qquad \textbf{1.42}$$

lo que se expone por la ecuación:

$$[A] = [B\,]^{\beta}.[C\,]^{\gamma}.[D\,]^{\delta} \qquad \textbf{1.43}$$

que conforma la ecuación dimensional inmediata de la magnitud A en función de las B, C y D, esto es, una *ecuación simbólica* que declara como se modifica su unidad en un sistema acorde, al variar las unidades de las B, C y D que participan en su ecuación de definición.

Puede ser que estas B, C y D no sean las fundamentales, pero si se han hallado por otro procedimiento (sus ecuaciones de definición reiteradamente), las dimensiones de B, C y D:

$$[B]=[L]^{\lambda_b}.[M]^{\mu_b}.[T]^{\tau_b};[C]=[L]^{\lambda_c}.[M]^{\mu_c}.[T]^{\tau_c};$$

$$[D]=[L]^{\lambda_d}.[M]^{\mu_d}.[T]^{\tau_d} \qquad \textbf{1.44}$$

$$[A]=[L]^{\beta.\lambda_b+\gamma.\lambda_c+\delta.\lambda_c}.[M]^{\beta.\mu_b+\gamma.\mu_c+\delta.\mu_c}.[T]^{\beta.\tau_b+\gamma.\tau_c+\delta.\tau_c}$$

Las ecuaciones dimensionales se podrían considerar, de la observación de 1.43 y 1.44, ecuaciones entre expresiones algebraicas. Sin embargo, se debe considerar que las ecuaciones de dimensiones no son ecuaciones físicas, es decir, no relaciona cantidades de magnitudes; por ejemplo, de la ecuación de definición para la presión: p=F/S, resulta la ecuación de dimensión:

$$[p]=[L]^{-1}.[M].[T]^{-2} \qquad \textbf{1.45}$$

pero esta no puede considerarse como una ecuación física y deducir que cuando un gas está sometido a una presión p la longitud recorrida por una molécula gaseosa de masa M durante un tiempo T es $L=M/(p.T^2)$. Por esto, para que estos símbolos no se confundan con las magnitudes se les enmarca con un paréntesis cuadrado.

Existen en la física unidades adimensionales, algunas de ellas ya han aparecido a lo largo de la lección, tales como las magnitudes ángulo plano y ángulo sólido, además de estas otras magnitudes adimensionales se encuentran tabuladas en la tabla VI. De ellas cabe indicar que algunas magnitudes adimensionales su unidad es la correspondiente a una cantidad concreta de una sustancia, así por ejemplo la densidad relativa de un fluido la unidad es la densidad del agua a 1 atmosfera de presión y 4ºC, o magnitudes eléctricas relativas cuya unidad es la correspondiente al vacío, existen otras unidades que no corresponden a ninguna magnitud, tales como el Belio o el Neper, aunque principalmente se utiliza para la primera la unidad submúltiplo decibelio (dB).

Tabla VI

Magnitud	Unidad	Definición
Densidad relativa*	Para sólidos y líquidos la densidad del agua a 4º C 1 atm. Para gases la del aire a 0ºC y 1 atm	$\rho' = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}}$
Peso específico*	Para sólidos y líquidos el peso del agua a 4º C 1 atm. Para gases el del aire a 0ºC y 1 atm	$\gamma' = \frac{\gamma}{\gamma_{H_2O}} = \rho'$
Permitividad relativa*	La permitividad del vacío	$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$
Permeabilidad relativa*	La permeabilidad del vacío	$\mu' = \frac{\mu}{\mu_0}$
índice de refracción	(no tiene)	$n = \frac{c}{v}$
Susceptibilidad electrica	(no tiene)	$\kappa_e = \varepsilon_r - 1$
Susceptibilidad magnética	(no tiene)	$\kappa = \mu' - 1$
Logaritmo decimal de un cociente**	Belio (B)	$1B = \log\left(\frac{I}{I_O}\right)$
Logaritmo neperiano de un cociente**	Neper (Np)	$1B = \log\left(\frac{I}{I_O}\right)$

* No se expresa mediante unidad a pesar de tener una.
** Es aplicable a diversas magnitudes, no pertenece a ninguna magnitud en concreto.

1.14. CAMBIO DE UNIDADES

Se desea determinar una cantidad de masa y una distancia, para ello dos operadores distintos miden dichas cantidades expresando su resultado en los sistemas fps y cgs, respectivamente, el primer operador, da como longitud $d=l_1$ ft, y $m=m_1$ lb, el segundo operador indica que $d=l_2$ cm, y $m=m_2$ g. Al considerar las palabras "pies", "centímetros", "libras" y " gramos" como símbolos algebraicos, tal como x e y en una ecuación, por ejemplo, x=567'3.y

Utilizando esta analogía se sustituye ft por 30'48 cm y lb por 453'6 g, obteniéndose así,

$$d = l_1.ft = l_1.3'048cm = (3'048.l_1)cm$$

$$m = m_1.lb = m_1.4'536g = (453,6.m_1)g \qquad \textbf{1.46}$$

$$l_2 = 3'048.l_1;\ m_2 = 4'536.m_1$$

Así el cambio de unidades es un simple problema algebraico, suponiendo a los símbolos de las unidades, como cantidades algebraicas, que han de sustituirse en función de otras con las que observan una relación conocida o fácilmente deducible.

Este procedimiento de cambio de unidades puede denominarse método simbólico, puesto que se considera a los nombres de las unidades como símbolos, y se operan con ellos como si fuesen entes algebraicos. Siempre se pueden comprobar los resultados obtenidos por este método, considerando medidas de la misma magnitud, en cada uno de los sistemas de unidades.

También se pueden realizar los cambios por multiplicación o división tantas veces como unidades que intervengan, por la relación entre unidades, este procedimiento es más pesado, pero se suelen cometer menos errores. Por ejemplo, para expresar 1 kW.h en Ergios, basta con:

$$1kW = 10^3W;\ 1h = 3600s;\ 1J = 10^7 erg$$

$$1 = 10^3.\frac{W}{kW};\ 1 = 3600.\frac{s}{h};\ 1 = 10^7.\frac{erg}{W.s} \qquad \textbf{1.47}$$

$$1kW.h = 1kW.h.10^3.\frac{W}{kW}.3600.\frac{s}{h}.10^7.\frac{erg}{W.s} = 36.10^{12} erg$$

Las ecuaciones de dimensiones son aplicables al cambio de unidades, si se combina el método simbólico con la notación dimensional se tiene un método muy provechoso para cambiar de unidades con cualquier magnitud física. Por ejemplo, se quiere expresar la unidad de fuerza del sistema fps, es decir, el poundal en función de la unidad del sistema cgs, o sea, la dina.

Como ambos sistemas de unidades mecánicas tienen las mismas ecuaciones de definición (ambos son sistemas físicos), las dimensiones de la fuerza son $[M].[L].[T]^{-2}$, y por tanto, 1 poundal = 1 $lb.ft.s^{-2}$, sustituyendo el pie y la libra, se tendrá:

$$1\,poundal = 1.453'6g.30'48cm.s^{-2} = 13826g.cm.s^{-2} = 13826din \qquad \mathbf{1.48}$$

Así el método general no presenta vacilaciones. Para cambiar la medida de cualquier magnitud física, de uno a otro sistema de unidades, bastará con ver cuales son las dimensiones de dicha magnitud física y las relaciones entre las unidades fundamentales entre los dos sistemas de unidades. Entonces, las relaciones entre las unidades funda-mentales de ambos sistemas se tratan como relaciones algebraicas, con ello, la transformación se lleva a cabo por simple sustitución.

1.15. LEY DE HOMOGENEIDAD

Sea una expresión física abreviada en la expresión:

$$A = B \qquad \mathbf{1.49}$$

donde A y B son expresiones monomias F=m.a donde A representaría a la Fuerza, y B al producto de la masa por la aceleración.

Si la expresión física es una expresión mecánica, las dimensiones del primer miembro, ordinariamente, serán:

$$[A] = [L]^{\alpha}.[M]^{\beta}.[T]^{\gamma} \qquad \mathbf{1.50}$$

y las del segundo miembro

$$[B] = [L]^{\lambda}.[M]^{\mu}.[T]^{\tau} \qquad \mathbf{1.51}$$

Realizando una medición de una cantidad y tomando un cierto sistema de unidades, acorde con el sistema de ecuaciones de definición elegido previamente, sean a_1 y b_1 los medidas resultantes de efectuar operaciones en A y en B; con dichas medidas, se verificará:

$$a_1 = b_1 \qquad \textbf{1.52}$$

Sea otro sistema de unidades idénticamente acorde, pero que se distingue del primero en que su unidad de longitud sea δ veces menor, su unidad de masa sea ε veces menor y su unidad de tiempo sea ζ veces menor, es decir:

$$U_{L_2} = \frac{U_{L_1}}{\delta}; U_{M_2} = \frac{U_{M_1}}{\varepsilon}; U_{T_2} = \frac{U_{T_1}}{\zeta} \qquad \textbf{1.53}$$

Siendo a_2 y b_2 las medidas resultantes de efectuar operaciones en A y en B, en este segundo sistema de unidades, se tiene:

$$a_2 = b_2 \qquad \textbf{1.54}$$

Denominando U_{A_1}, U_{A_2} a las unidades del primer miembro y U_{B_1}, U_{B_2} a las de la magnitud que representa el segundo miembro, tanto en el primero como en el segundo sistema de unidades empleadas, resulta:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{U_{A_1}}{U_{A_2}} = \left(\frac{U_{L_1}}{U_{L_2}}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{U_{M_1}}{U_{M_2}}\right)^{\beta} \cdot \left(\frac{U_{T_1}}{U_{T_2}}\right)^{\gamma} \Rightarrow \mathrm{a}_2 = \delta^{\alpha}.\varepsilon^{\beta}.\zeta^{\gamma}.\mathrm{a}_1 \qquad \textbf{1.55}$$

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{U_{A_1}}{U_{A_2}} = \left(\frac{U_{L_1}}{U_{L_2}}\right)^{\lambda} \cdot \left(\frac{U_{M_1}}{U_{M_2}}\right)^{\mu} \cdot \left(\frac{U_{T_1}}{U_{T_2}}\right)^{\tau} \Rightarrow \mathrm{b}_2 = \delta^{\lambda}.\varepsilon^{\mu}.\zeta^{\tau}.\mathrm{b}_1 \qquad \textbf{1.56}$$

Si para simplificar se supone β=μ y γ=τ, y de 1.52 y 1.54, imprescindiblemente se ha de cumplir que α=λ, concluyéndose que, para que las ecuaciones físicas sean independientes del sistema acorde de unidades empleado, es indispensable que sus dos miembros sean homogéneos respecto a todas las magnitudes fundamentales. Esta ley de homogeneidad autoriza declarar que, hay error en toda ecuación que no sea homogénea.

También se puede razonar de la ley de homogeneidad que, en Física, todo exponente es adimensional. Por ejemplo sea:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \mathbf{1.57}$$

Expresión que indica que, la intensidad de corriente que circula por un circuito inductivo, de constante de tiempo τ, en función del tiempo trascurrido desde que se cierra el circuito, aplicando la ley de homogeneidad se tiene:

$$[\tau]^{-1}.[T] = [L]^0.[M]^0.[T]^0.[I]^0 \Rightarrow [\tau] = [T] \qquad \mathbf{1.58}$$

luego la constante de tiempo del circuito se medirá en s en el S.I.

La ley de homogeneidad también permite discurrir fórmulas sencillas y monomias, salvo constantes de proporcionalidad.

Finalmente, hay que indicar que las constantes universales o características, que participan en determinadas leyes físicas, pueden gozar de dimensiones, a pesar de que las primeras no son magnitudes. Por ejemplo, la ecuación de dimensiones de la constante de gravitación universal G es:

$$\vec{F} = -G.\frac{M.m.\vec{r}}{r^3} \Rightarrow G = \frac{F.r^2}{M.m}$$

$$[G] = \frac{[F].[L]^2}{[M]^2} = \frac{[M].[L].[T]^{-2}.[L]^2}{[M]^2} = [M]^{-1}.[L]^3.[T]^{-2} \qquad \mathbf{1.59}$$

Resumen

Se denomina magnitud física a todo observable que se puede medir. Se denomina cantidad de una magnitud al estado de esa magnitud en un objeto determinado.

Dos cantidades de una misma magnitud se dice que son comparables cuando existe una definición operacional y universal.

Para una magnitud determinada se puede elegir una cantidad como patrón, a esta cantidad se le denomina unidad, la comparación de cantidades de la misma magnitud con la unidad se le denomina medida.

De todas las posibles relaciones entre unidades, la elección de un sistema de ecuaciones constituye un sistema particular de ecuaciones de definición y dicho sistema tendrá asociado un sistema de unidades acorde.

Los sistemas físicos de unidades eligen como unidades fundamentales mecánicas la longitud, masa y tiempo, mientras que los sistemas técnicos toman la longitud, fuerza y tiempo.

Las unidades fundamentales del Sistema Internacional de Unidades son para la longitud: el metro, para la masa: el kilogramo, para el tiempo: el segundo, para la temperatura: el Kelvin, para la intensidad de corriente eléctrica: el Amperio, para la cantidad de materia: el mol, para la intensidad luminosa: la candela.

En todas las ciencias aplicadas se trabaja con datos numéricos adquiridos con medidas y observaciones que nunca son totalmente precisas.

Las ecuaciones de dimensiones, facultan para decir, como varía cada una de las unidades derivadas de un sistema acorde, cuando varían las unidades fundamentales. Dichas ecuaciones son simbólicas.

La ley de homogeneidad indica que hay error en toda ecuación cuyos miembros tienen distintas dimensiones.

LECCIÓN 2

SISTEMAS DE VECTORES

Objetivos

1. *Recordar los conceptos de vector y momento de un vector.*
2. *Repasar las operaciones con vectores y funciones vectoriales.*
3. *Saber determinar la resultante de un sistema de vectores.*
4. *Analizar la importancia de determinar la resultante de un sistema de vectores.*
5. *Conocer el momento resultante de un sistema de vectores en un punto.*
6. *Determinar el campo de momentos de un sistema de vectores.*
7. *Adquirir la idea de momento áxico.*
8. *Estudiar el concepto de torsor en un punto, su importancia y aplicación.*
9. *Relacionar el Eje Central de un sistema de vectores, con la línea de acción de un vector deslizante.*
10. *Saber obtener un sistema de vectores equivalente más sencillo.*

Contenido

2.1. *Álgebra vectorial.*

2.2. *Funciones vectoriales.*

2.3. *Momento de un vector.*

2.4. *Resultante general y momento resultante.*

2.5. *Invariantes del sistema.*

2.6. *Momento áxico de un sistema. Carácter equiproyectivo del campo de momentos.*

2.7. *Eje central de un sistema de vectores.*

2.8. *Pares.*

2.9. *Equivalencia de dos sistemas de vectores. Clasificación de los sistemas de vectores.*

2.10. *Algunos sistemas de vectores. Teorema de Varignon.*

- 2.10.1. Sistemas de vectores coplanarios.
- 2.10.2. Sistemas de vectores deslizantes concurrentes.
- 2.10.3. Sistemas de vectores deslizantes paralelos.
- 2.10.4. Sistemas de vectores localizados paralelos.

2.1. ÁLGEBRA VECTORIAL

Dado que una gran parte de las magnitudes físicas son de carácter vectorial, se hace imprescindible recordar las leyes que gobiernan las operaciones entre vectores, pues el empleo de las magnitudes físicas vectoriales se hace a través de los vectores que las representan, con lo que se alcanza una mayor exactitud en la interpretación de los fenómenos y una gran facilidad de trabajo.

Los vectores respecto a su aplicación se pueden clasificar en libres, deslizantes y fijos, y en cuanto a su forma de actuar en **polares** (como la velocidad, fuerza, etc.) o **axiales** a las magnitudes vectoriales a las que hay que asignar un sentido por convenio, entre las que se encuentran la velocidad angular, la aceleración angular, el momento de un vector, etc.

Todo vector pertenece a un espacio vectorial. Se denomina base del espacio vectorial a todo sistema generador mínimo, al número de vectores que constituyen una base del espacio vectorial se le denomina **dimensión del espacio vectorial**, luego una base constituye un sistema de vectores linealmente independiente dentro del espacio vectorial considerado; dado un espacio de tres dimensiones, elegida una base, cualquier vector se puede expresar de forma única mediante:

$$\vec{V} = \lambda_1.\vec{a} + \lambda_2.\vec{b} + \lambda_3.\vec{c} \qquad \textbf{2.1}$$

llamándose a los escalares λ_1, λ_2, λ_3, componentes del vector en el espacio considerado. Cuando los vectores de la base representan la misma cantidad unidad y son ortogonales entre sí, la base se denomina **base ortonormal**. Todo espacio vectorial tridimensional queda definido por ternas de vectores no coplanarios que forman un triedro, la terna que se utilizará será una terna característica a derechas y ortonormal que denominaremos por $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, Definiéndose los ejes x, y, z a las rectas concurrentes en un punto O y paralelas a cada uno de los vectores de la base ortonormal, a todo vector unitario se le denominará **versor**.

Dado un vector cualquiera se denomina componentes del mismo a sus proyecciones sobre las direcciones de los ejes coordenados de referencia (x, y, z).

A cada vector le corresponde una terna de componentes única y recíprocamente cada terna de componentes designa un solo vector. De esto se tiene que un vector se expresa mediante sus tres componentes (a_x, a_y, a_z). Concretamente los vectores de la base se expresarán

$$\vec{i} = (1,0,0);\ \vec{j} = (0,1,0);\ \vec{k} = (0,0,1)$$

2.2

$$\vec{i} = 1.\vec{i} + 0.\vec{j} + 0.\vec{k};\ \vec{k} = 0.\vec{i} + 1.\vec{j} + 0.\vec{k};\ \vec{k} = 0.\vec{i} + 0.\vec{j} + 1.\vec{k}$$

El **módulo** del vector es el valor de la diagonal de un paralelepípedo recto rectangular cuyas aristas son las componentes del vector, es decir

$$|\,\vec{a}\,| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad \textbf{2.3}$$

Los cosenos directores de la dirección de un vector, son los cosenos de los ángulos que la dirección del vector forma con los ejes del sistema de referencia y se denominan respectivamente α_x, α_y, α_z; o también α, β, γ; sus valores son:

$$\alpha_x = \frac{a_x}{a};\ \alpha_y = \frac{a_y}{a};\ \alpha_z = \frac{a_z}{a} \qquad \textbf{2.4}$$

En un versor, las componentes coinciden con los cosenos directores, de donde se puede determinar los cosenos directores de una dirección hallando el vector unitario de la misma. teniendo en cuenta 2.3 se obtiene una importante relación entre los cosenos directores

$$1 = \alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 \qquad \textbf{2.5}$$

La suma de vectores, tiene las siguientes propiedades: conmutativa, asociativa, elemento neutro (vector nulo), y vector opuesto.

La suma analítica de vectores se realiza a partir de las componentes, sean los vectores:

$$\vec{a}_1 = a_{1_x}.\vec{i} + a_{1_y}.\vec{j} + a_{1_z}.\vec{k}$$

$$\vec{a}_2 = a_{2_x}.\vec{i} + a_{2_y}.\vec{j} + a_{2_z}.\vec{k} \qquad \textbf{2.6}$$

....

$$\vec{a}_n = a_{n_x}.\vec{i} + a_{n_y}.\vec{j} + a_{n_z}.\vec{k}$$

sumando miembro a miembro y teniendo en cuenta la ley asociativa de las suma de vectores y de acuerdo con la ley distributiva respecto a la adición de escalares del producto de un vector por un escalar, resulta

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n = (a_{1x} + a_{2x} + \ldots + a_{nx}).\vec{i} +$$

$$+(a_{1y} + a_{2y} + \ldots + a_{ny}).\vec{j} + (a_{1z} + a_{2z} + \ldots + a_{nz}).\vec{k} \qquad \textbf{2.7}$$

El producto de un escalar por un vector tiene las propiedades: distributiva respecto a los vectores, distributiva respecto a los vectores, asociativa respecto a los escalares, existe el escalar neutro λ=1, existe el escalar indepotente λ=0 y vector opuesto.

La expresión analítica del producto de un vector por un escalar será en consecuencia:

$$\lambda.\vec{a} = \lambda.(a_x.\vec{i} + a_y.\vec{j} + a_z.\vec{k}) = \lambda.a_x.\vec{i} + \lambda.a_y.\vec{j} + \lambda.a_z.\vec{k} \qquad \textbf{2.8}$$

es decir, el vector producto de uno dado por un escalar tiene por componentes el producto de la respectiva componente del vector dado por el escalar.

El producto escalar de dos vectores tiene las propiedades: conmutativa, asociativa respecto a la multiplicación por un escalar, distributiva respecto a la suma vectorial, existen divisores de cero (el producto escalar de dos vectores distintos de cero puede ser nulo), el producto escalar no es asociativo, el producto escalar de un vector por si mismo es la norma del vector y también la propiedad triangular.

La expresión analítica del producto escalar será, teniendo en cuenta su propiedad distributiva respecto a la suma vectorial:

$$\vec{a}.\vec{b} = (a_x.\vec{i} + a_y.\vec{j} + a_z.\vec{k}).(b_x.\vec{i} + b_y.\vec{j} + b_z.\vec{k}) = a_x \cdot b_x.\vec{i}.\vec{i} +$$

$$+ a_x \cdot b_y.\vec{i}.\vec{j} + a_x \cdot b_z.\vec{i}.\vec{k} + a_y \cdot b_x.\vec{j}.\vec{i} + a_y \cdot b_y.\vec{j}.\vec{j} + a_y \cdot b_z.\vec{j}.\vec{k} + \qquad \textbf{2.9}$$

$$+ a_z \cdot b_x.\vec{k}.\vec{i} + a_z \cdot b_y.\vec{k}.\vec{j} + a_z \cdot b_z.\vec{k}.\vec{k} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

El producto vectorial de dos vectores es otro vector perpendicular al plano generado por los dos primeros vectores, sentido tal que el triedro formado por el primer factor, el segundo y el producto sea directo y cuyo módulo es el producto de los módulos de los vectores factores por el seno del ángulo que forman los vectores. Las propiedades del producto vectorial son: el producto vectorial de un vector por si mismo es nulo, el elemento indepotente es el vector nulo, dos vectores cuyo producto sea nulo son dependientes entre sí, propiedad distributiva, no es conmutativo y no es asociativo.

La expresión analítica del producto vectorial teniendo en cuenta que goza de la propiedad distributiva:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad \mathbf{2.10}$$

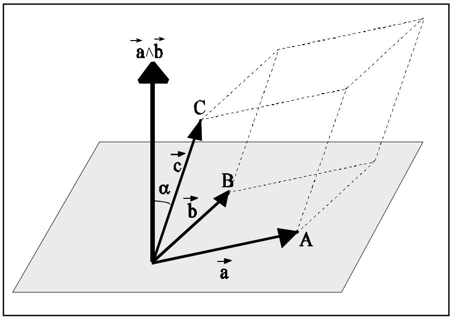

Figura 2.1

El producto mixto de tres vectores es el producto escalar del tercero por el producto vectorial de los dos primeros, este producto tiene una interpretación geométrica sencilla. Los tres vectores determina un paralelepípedo cuyo volumen es el valor del producto mixto.

El volumen del paralelepípedo es el área de la base S por su altura h, siendo:

$$S = |\vec{a} \wedge \vec{b}|$$

$$h = |\vec{c}|.\cos\alpha = \vec{c}.\frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{|\vec{a} \wedge \vec{b}|} \qquad \mathbf{2.11}$$

$$\zeta = S.h = \vec{c}.(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

Las propiedades del producto mixto son: El signo del producto mixto depende del ángulo α, la condición necesaria y suficiente para que se anule es que los tres vectores sean coplanarios, el producto mixto es circularmente conmutativo, es distributivo respecto a los escalares y distributivo respecto a la suma.

La expresión analítica del producto mixto es:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{c} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} =$$

2.12

$$= \vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{c} \wedge \vec{a}).\vec{b} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

El doble producto vectorial consiste en multiplicar vectorialmente un vector al vector resultante de multiplicar vectorialmente otros dos vectores.

Situados los segundos vectores en el plano π el vector resultante de su producto vectorial es perpendicular al plano. El doble producto vectorial por ser perpendicular al vector resultante del anterior producto vectorial, estará contenido en el plano y por tanto se puede expresar como combinación lineal de los dos vectores que generan el plano, es decir:

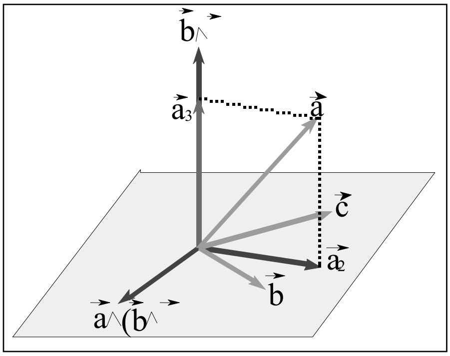

Figura 2.2

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \lambda.\vec{b} + \mu.\vec{c} \qquad \textbf{2.13}$$

para determinar los parámetros λ y μ, se descompone el vector **a** en dos vectores que son sus proyecciones ortogonales sobre el plano π y sobre su vector normal.

Considerando la terna ortogonal formada por los vectores $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}), \vec{a}_2, \vec{b} \wedge \vec{c}$ y sobre ella los versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, se puede expresar los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ en la forma:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_2.\vec{j} + a_3.\vec{k} \\ \vec{b} &= b_1.\vec{i} + b_2.\vec{j} \\ \vec{c} &= c_1.\vec{i} + c_2.\vec{j} \end{aligned} \tag{2.14}$$

se obtiene:

$$\vec{b} \wedge \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} .\vec{k} = A.\vec{k}$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = a_2.A.\vec{i} = \lambda.(b_1.\vec{i} + b_2.\vec{j}) + \mu.(c_1.\vec{i} + c_2.\vec{j}) \tag{2.15}$$

de donde

$$\lambda = \frac{a_2 \cdot c_2 .A}{b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1} = a_2 \cdot c_2 = \vec{a}.\vec{c}$$

$$\mu = -\lambda.\frac{b_2}{c_2} = -a_2 \cdot b_2 = -\vec{a}.\vec{b} \tag{2.16}$$

deduciéndose:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c}).\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c} \tag{2.17}$$

El producto escalar y vectorial de dos productos vectoriales quedan:

$$(\vec{a} \wedge b).(\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a}.\vec{c}).(\vec{b}.\vec{d}) - (\vec{a}.\vec{d}).(\vec{b}.\vec{c})$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = [(\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{d}].\vec{c} - [(\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{c}].\vec{d} = \tag{2.18}$$

$$= [\vec{a}.(\vec{c} \wedge \vec{d})].\vec{b} - [\vec{b}.(\vec{c} \wedge \vec{d})].\vec{a}$$

2.2. FUNCIONES VECTORIALES

Se dice que un vector libre cuya dirección, sentido y módulo son función de los valores de una variable escalar t, es función vectorial de t y se expresa del siguiente modo:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t).\vec{i} + y(t).\vec{j} + z(t).\vec{k} \qquad \textbf{2.19}$$

En estas funciones vectoriales se da por supuesto que el origen del vector coincide permanentemente con el de coordenadas, al variar el parámetro t, el afijo del vector genera una curva llamada **indicatríz** cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t) \qquad \textbf{2.20}$$

Una función vectorial es continua en el punto $t=t_0$, si dado un número $\varepsilon>0$ tan diminuto como se quiera, se puede determinar otro número $\delta>0$, de manera que para cualquier valor de t que cumpla la condición $|\Delta t| = |t - t_0| < \delta$, se verifique $\left|\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)\right| < \varepsilon$

La continuidad vectorial incluye la continuidad de las funciones analíticas que expresan las modificaciones del módulo y de la dirección del vector. Si la continuidad se verifica solo para valores positivos de incremento de t se dice que existe continuidad a derechas, y si solo para valores negativos, entonces se dice que la función vectorial es continua a izquierda.

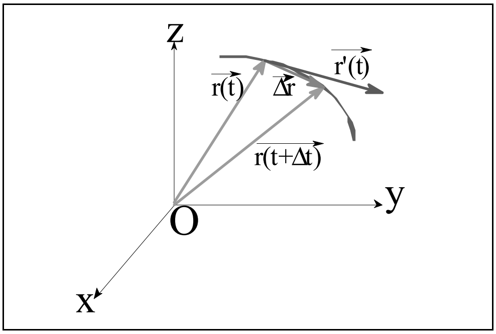

Figura 2.3

Se define la derivada de una función vectorial de variable escalar, como el límite del incremento vectorial de la función, dividido por el incremento de la variable, cuando éste tiende a cero:

que es un vector tangente a la curva indicatriz (Fig. 2.3). En función de sus componentes se tiene:

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad \textbf{2.21}$$

$$\begin{aligned} &\vec{r} + \Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) = \\ &= x(t+\Delta t).\vec{i} + y(t+\Delta t).\vec{j} + z(t+\Delta t).\vec{k} \end{aligned} \qquad \textbf{2.22}$$

de donde:

$$\begin{aligned} &\Delta\vec{r} = [x(t+\Delta t) - x(t)].\vec{i} + \\ &+ [y(t+\Delta t) - y(t)].\vec{j} + [z(t+\Delta t) - z(t)].\vec{k} \end{aligned} \qquad \textbf{2.23}$$

dividiendo por Δt y encontrando el límite para incremento de t tendiendo a cero, resulta:

$$\vec{r}'(t) = x'(t).\vec{i} + y'(t).\vec{j} + z'(t).\vec{k} \qquad \textbf{2.24}$$

y por tanto, ***la derivada de un vector función de una variable escalar, es un nuevo vector cuyas componentes son las derivadas de las componentes del vector función.***

Usando la definición de derivada, ésta se obtiene, para una función o conjunto de funciones relacionadas entre sí, mediante las operaciones con vectores determinadas en el apartado anterior. Las reglas de derivación más usuales son:

1. La derivada de una suma de vectores es la suma de las derivadas de los vectores.

2. La derivada del producto de un escalar por un vector ambos función de la misma variable escalar, es igual a la derivada del escalar por el vector más el escalar por la derivada del vector.

3. La derivada del producto escalar de dos vectores función de una misma variable escalar, es igual al producto escalar de la derivada del primer vector por el segundo más el producto escalar del primer vector por la derivada del segundo.

4. La derivada del producto vectorial de dos vectores, ambas funciones de la misma variable escalar, es igual a la derivada del primer vector multiplicada vectorialmente por el segundo más el producto vectorial del primer vector por la derivada del segundo.

Para seguir leyendo haga click aquí